CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 1997-1998

Épreuve de Mathématiques

Durée : 1h30

Exercice 1 *(8 points)*

1.1- Factoriser la fonction suivante: $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$ *(4 points ; 3 lignes)*

1.2- Simplifier dans R l'expression : $A = \frac{25}{160}$ *(4 points ; 2 lignes)*

1.3- Quelle est, dans R, la solution de l'équation :

$\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^2 = 2(x-1)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right)$ *(4points ; 6 lignes)*

1.4- Soient $f(x) = \log x$ et $g(x) = \log ax$; a étant un réel non nul. *(6 points)*

- Compléter : $D_f =$ ---------------- ; $D_g =$ ------------------
- Calculer et comparer : $f'(x) = (\log x)'$ et $g'(x) = (\log ax)'$ en supposant $a > 0$ *(3 lignes)*

Exercice 2

f est une fonction telle que : $f(x) = (x^2 - 1)/(2x^2 - x)$

1°) Etudier les variations de $f(x)$ *(9 points ; 12 lignes)*

2°) n est un entier non nul : une urne électorale contient $n-1$ bulletins « Non » et $n+1$ bulletins « Oui ». On prélève deux bulletins : chacun ayant la même probabilité d'être prélevé.

Calculer la probabilité P_n de l'événement : « On a prélevé 2 bulletins portant des votes différents ». *(10 points ; 8 lignes)*

3°) Utiliser la première question pour trouver le naturel n_0 pour lequel la probabilité P_{n_0} est maximum. Calculer P_{n_0}.
(8points ; 3 lignes)

Exercice 3

Les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ ont pour coordonnées respectives (a, b, c) *et* (a', b', c')

1°) Démontrer que si les vecteurs u et v sont colinéaires alors :

$a'b - ab' = 0$; $b'c - bc' = 0$ et $a'c - ac' = 0$. *(10points ; 17 lignes)*

2°) Donner une relation que doivent vérifier les coordonnées des vecteurs u et v pour que le couple (u, v) forme une partie libre de $\mathbb{R}^3$. *(10 points ; 14 lignes)*

Exercice 4

Quel est l'ensemble des centres des sphères qui passent par deux points distincts donnés

A, B ? *(15points ; 8 lignes)*

Exercice 5

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

1°) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int x^p dx < 1^p + 2^p + \cdots + n^p < 1 + \int x^p dx$$ *(7 points ; 6 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 1999-2000

Épreuve de Mathématiques **Durée : 1h30**

Exercice 1 *(8 points)*

a) Résoudre, dans R, l'équation irrationnelle : $\sqrt{3-x} = x - 1$ *(4 points ; 6 lignes)*
b) Résqudre, dans R, l'inéquation : $|(x-1)/(x+1)|$ *(4 points ; 4 lignes)*

Exercice 2 *(10 points)*

Trois personnes sont dans un ascenseur qui peut s'arrêter à n étages $(n \geq 3)$. On suppose que la probabilité qu'une personne données s'arrête à un étage donné est $\frac{1}{n}$ quel que soit la personne et quel que soit l'étage et que les décisions de trois personnes sont indépendantes.

1°) Quelle est la probabilité P_o que les trois personnes s'arrêtent à des étages différents ?

(5 points ; 4 lignes)

2°) Déterminer le nombre n d'étages pour que la probabilité en 1°) soit de $\frac{1}{2}$?

(5points ; 5 lignes)

Exercice 3 *(15 points)*

1°) Soit $x\epsilon[n-1,n]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que : $\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n-1}$

(5 points ; 5 lignes)

2°) Soit $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \text{Log}\, n,\, n \in N^*$

a) Démontrer que : $U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx$, $x\epsilon[n-1,n]$ *(5 points ; 5 lignes)*

b) En utilisant les questions 1°) et 2°), démontrer que U_n est convergente i.e. que $U_n \leq U_{n-1}$ *(5 points ; 3 lignes)*

Exercice 4 *(10 points)*

Soit $z = a + bi$, un nombre complexe non nul, a et b etant deux réels. Déterminer z (i.e. les reels a et b) tel que les complexes z , $1 - z$ et $\frac{1}{z}$ aient le meme module. *(6 lignes)*

Exercice 5 *(15 points)*

Soit $f(x) = (x^3 + x)^{\frac{1}{3}}$ une fonction reelle

1°) Domaine de définition de f = …………………….. ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$……. ;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$……… . (3 points)

2°) $f(x)$ est-elle paire ou impaire ? ………………………………………………*(2 points)*

3°) Compléter le tableau suivant : *(4 points)*

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

4°) Calculer $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$ ………….. et $b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] =$……… (2 pts)

Conclusion : …………………………………………………………………………

(1 points)

5°) Esquisser l'allure graphique de $f(x)$ *(3 points ; repère orthogonal)*

Exercice 6 *(10 points)*

Une firme a fixé à 100 son projet de production pour la première année de mise en route du projet. Elle se propose d'augmenter tous les ans sa production de 10 %.

1. De combien sera le niveau de sa production au bout de la sixième année ? *(5 points)*
2. Déterminer sa production totale pour les six années. *(5 points ; 6 lignes)*

Exercice 7 *(10 points)*

Une personne a acheté pour 4500 gourdes des dollars US au prix p (exprimés en gourdes). Si ce prix est diminué de 1 gourde, pour la même somme, elle peut acheter 50 dollars US de plus. A quel prix (i.e. déterminer p) cette personne a-t-elle acheté ces dollars ? Quelle est la quantité q de dollars US acheté à ce prix ? *(10 lignes)*

Exercice 8 *(9 points)*

Calculer les primitives suivantes tout en ayant soin de préciser leur domaine de définition :

a) $I_t = \int \log x \, dx$ *(3 points ; 6 lignes)*

b) $I_3 = \int \sin(2x) \, dx$ *(3 points ; 6 lignes)*

c) $I_4 = \int \frac{1}{1+x^2} x dx$ *(3points ; 5 lignes)*

Exercice 9 *(5 points)*

Quelle est l'équation du plan P passant par le point $A(1,1,1)$ et perpendiculaire au vecteur $u = (2 \quad 3 \quad 4)$? *(6 lignes)*

Exercice 10 *(8 points)*

Soit X et Y deux matrices telles que $XY = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $YX = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Déterminer les réels a et b. *(10 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2000-2001

Épreuve de Mathématiques **Durée : 1h30**

Exercice 1 *(10 points)*

a) Donner le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{2 - |1 - |1 - x||}$ *(2 points ; 2 lignes)*

b) Réduire l'irrationnel $I = \frac{5\sqrt[7]{128}}{\sqrt[6]{15625}}$ à $\frac{2}{\sqrt{5}}$ *(2,5 points ; 3 lignes)*

c) Simplifier et exprimer à l'aide de puissances de nombres premiers le nombre

$$A = \frac{(-12)^2 \times (18)^2 \times (-10)^4}{(14)^2 \times (-8)^3}$$ *(5 lignes)*

d) En utilisant les formules des arcs associés : Calculez $\sin(5\pi/4)$ *(5 lignes)*

Exercice 2 *(5 points)*

Résoudre et discuter dans $\mathbb{R}$ l'équation à une inconnue x dans laquelle m est un paramètre arbitraire.

$$(m^2 - 4)\,x = 2m + 4$$ *(6 lignes)*

Exercice 3 *(15 points)*

Soient deux ensembles $A_1 = \{p_1\}$ et $A_2 = \{p_1, p_2\}$

1. Décrire l'ensemble des parties $\wp(A_1)$ et $\wp(A_2)$ respectivement de A_1 et de A_2. A quoi est égal $card(\wp(A_1))$ et $card(\wp(A_2))$? *(5 points ;3 lignes)*

Soit $A_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un ensemble de n points situés dans un plan donné. On suppose qu'on ne peut pas avoir trois points alignés.

1. Combien de sous-ensembles possibles de A_n contenant au moins un élément peut-on former ? *(5 points ; 4 lignes)*
2. Combien de droites peut-on former avec les points éléments d'A_n? *(5 points ; 5 lignes)*

Exercice 4. *(10 points)*

Un étudiant veut emprunter 9 livres à la bibliothèque du CTPEA. Mais il est obligé de prendre seulement 4 à la fois.

1. De combien de façon peut-il choisir 4 livres ? *(5 points)* *(3 lignes)*
2. De combien de façon peut-il choisir si 2 des 9 livres qu'il désire lui sont indispensables ? *(5 points ; 5 lignes)*

Exercice 5 *(10 points)*

Soient z et z' deux complexes donnés. On suppose que $|z| = |z'| = 1$ et $1 + zz' \neq 0$

Démontrer que le complexe $Z = (z + z')/(1 + zz')$ est réel. *(6 lignes)*

Exercice 6 *(15 points)*

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ b & b & 0 \\ c & d & e \end{pmatrix}$

a) *A est-elle inversible ? (4 points ; 5 lignes)*

b) On suppose que $a = b = 1$ et $c = d = 0$ et l'on note par D la matrice obtenue.

1. Calculer D^2 et D^3 *(6 points ; 6 lignes)*
2. A quoi serait égal $D^n, n \in \mathbb{N}^*$ *(5 points ; 5 lignes)*

Exercice 7 *(10 points)*

On propose à un vendeur d'appareils électriques deux possibilités de rétribution

Possibilité I : l'attribution d'une rémunération fixe augmentée d'une commission évaluée à 10 % sur le montant des ventes mensuelles.

Possibilité II : Une rémunération ne comprenant qu'une commission de 13% sur le montant des ventes mensuelles.

1. Déterminer le montant des ventes mensuelles qui assure la même rétribution au vendeur. *(5 points ; 6 lignes)*
2. Déterminer la rétribution commune. *(3 points ; 4 lignes)*
3. Préciser pour chaque possibilité le montant de la commission. *(2 points ; 5 lignes)*

Exercice 8 *(10 points)*

Soit une suite réelle définie par $u_n = \int(x^n/(1+x)^{1/2})dx,\ \ x \epsilon\, [0\,;\,1]$

a) Calculer u_0 et u_1. (évaluer les intégrales) *(4 points ; 6 lignes)*
b) Montrer que u_n est décroissante, positive et donc convergente. *(3 points ; 4 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2002-2003

Épreuve de Mathématiques **Durée : 1h30**

Exercice 1 *(12 points)*

Résoudre Dans $\mathbb{R}$:

a) $\cos x\ +\sqrt{3}\sin x\ =\ \sqrt{2}$ *(5 points ; 6 lignes)*
b) $\mathit{minimum}\ (x, x^2 - 2x)\ =\ 1$ *(5 points ; 6 lignes)*

Exercice 2 *(10 points)*

On considère les fonctions réelles suivantes : $f(x)\ =\ (x^2-1)/\sqrt{x}$ et $g(x)\ =\ 2\sqrt{x}$

a) Délimiter le domaine de définition des fonctions f et g. *(4 points ; 4 lignes)*
b) Calculer $gof(\sqrt{a})$, $a \in \mathbb{R}^+$ et $fog(x)$. *(6 points ; 8 lignes)*

Exercice 3 *(15 points)*

Soit la matrice $A\ =\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$

a) Ecrire A sous la forme $A\ =\ I_2 + B$, I_2= matrice identité d'ordre 2 et B = matrice à déterminer. *(5 points ; 4 lignes)*
b) Calculer : $A^2\ =$; $A^3\ =$ *(4 points)*
n étant un entier naturel non nul, en déduire A^n = *(3 points)*
c) Soit C = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$. Déterminer n de telle sorte que $A^n = \ C$ *(4 points ; 4 lignes)*
d) Comparer la valeur de n trouvée en c) avec la trace et le déterminant de A^n.
Trace (A^n) = *(1 point)*

Déterminant (A^n) = *(1 point)*
Conclusion (comparaison) : *(2 points ; 1 ligne)*

Exercice 4

On considère un cercle de centre O et de rayon r.

a) Construisez (donner une esquisse) le cercle et inscrivez à l'intérieur un carré *(4 points ; espace pour construction)*

b) Démontrer que le côté du cercle inscrit est donné par $c = r\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$. Représenter graphiquement la fonction $c(r) = r(\sqrt{2})$ pour $r > 0$.
Démonstration : *(6 points ; 6 lignes)*
Graphique : *(1 point ; repère orthogonal)*

Exercice 5

Soit x, y deux réels tels que $x < y$. On considère deux constantes a et b strictement positives.

Démontrez que $x < \frac{ax+by}{a+b} < y$. *(8 points ; 5 lignes)*

Exercice 6

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right|$, $|\ldots|$ = valeur absolue.

a) Domaine de définition de f = *(1 point)*

b) Calcule de limites : $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ *(2 points)*

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ *(2 points)*

a) Donner la fonction dérivée de $f(x)$: $f'(x) =$ *(4 points ; 6 lignes)*
b) Tableau de variation : *(2 points ; tableau à remplir)*
c) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\, i\,;\, j)$ *(4 points ; repère orthogonal)*

Exercice 7

Soit W l'espace vectoriel des matrices de format (2,2) sur $\mathbb{R}$. Déterminer si les matrices A, B, et C de W sont indépendantes où :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(8 points ; 10 lignes)*

Exercice 8

Soit une fonction P : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longrightarrow z^2 + (4 - 2i)z$; $\mathbb{C}$ = ensemble des nombres complexes .

Soit m le point M d'affixe $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$ et E = ensemble des points M tels que $P(z)$ soit imaginaire pur.

a) Déterminer une équation cartésienne de (E). *(4 points ; 5 lignes)*

b) Ecrire l'équation trouvée en a) sous la forme $[(x+a)/c\,]^2 - [(y+b)/c]^2 = 1$ où a, b et c sont à déterminer. Dire de quel type de graphique s'agit-il. *(5 points ; 8 lignes)*

Exercice 9

On définit une variable aléatoire x « nombre de fois qu'il faut lancer une pièce de monnaie de manière à obtenir pour la première fois ».

Soit la fonction : $\mathbb{N}^* \longrightarrow [0\,;1]$

$x \longrightarrow a\,(1-a)^{x-1}$; $\mathbb{N}^*$= ensemble des entiers naturels sauf zéro; $x \in \mathbb{N}^*$ et a = probabilité d'avoir face.

On fixe $a = \frac{1}{5}$

1. Quelle est la probabilité d'avoir face pour la première fois au troisième lancer ? *(3 points ; 5 lignes)*
2. Dans combien de lancers a-t-on face pour la première fois si la probabilité correspondante est 0,082 ? *(4 points ; 4 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2003-2004

Épreuve de Mathématiques **Durée : 1h30**

Exercice 1 *(6 points)*

On considère dans $\mathbb{R}$ les deux fonctions $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{1/2}$ et $g(x) = (1 - x^2)^{1/2}$

a) Calculer $gof(x)$. *(3 points ; 5 lignes)*

b) Donner le domaine de définition de $gof(x)$, D_{gof} . *(3 points ; 6 lignes)*

Exercice 2 *(10 points)*

Deux chasseurs C_1, C_2 s'apprêtent à tirer simultanément sur un ramier. Le chasseur C_1 a $2/3$ de chance d'abattre le ramier et le chasseur C_2 en a $4/7$. Quelle est la probabilité que le ramier soit tué ? *(5 lignes)*

Exercice 3 *(20 points)*

On considère le vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calculer : $q = X'AX$, X' = transposée de X *(5 points ; 7 lignes)*

b) Trouver une matrice carré B de même format que A telle que : $X'AX \equiv X'BX$. Expliquer. *(5 points ; 8 lignes)*

c) Déterminer λ tel que $|B - \lambda\, I_2| = 0$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $BV = \lambda V$, $|\dots|$ = déterminant. *(10 points ; 14 lignes)*

Exercice 4 *(8 points)*

Trouver l'air (en hectares) d'un rectangle connaissant sa diagonale (35 m) et sachant que la longueur est le double de la largeur. *(5 lignes)*

Exercice 5 *(13 points)*

Soit $a_0 > 0$, $b_0 > 0$. On définit deux suites : $a_{n+1} = (a_n b_n)^{\frac{1}{2}}$ et $b_{n+1} = 0.5(a_n + b_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite a_n est croissante et que la suite b_n est décroissante. *(6 points ; 8 lignes)*
b) A quoi est égale la limite de $(b_{n+1} - a_{n+1})$ quand n augmente indéfiniment ? Expliquer. *(5 points ; 6 lignes)*
c) Tenant compte des résultats de a) et b), que peut-on dire des suites a_n et b_n ? *(5 points ; 4 lignes)*

Exercice 6 *(8 points)*

On considère deux nombres complexes $Z_1 = a + bi$ et $Z_2 = a' + b'i$ tels que $|Z_1| = |Z_2| = 1$ |...| étant le module. On définit le complexe : $\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}{1 - \bar{Z}_1 \bar{Z}_2}$, $\bar{Z}$ étant le conjugué de Z.

Démontrer que le rapport $Z/\bar{Z}$ est égale à un. *(7 lignes)*

Exercice 7 *(20 points)*

On considère une fonction dans l'ensemble des réels : $y = f(x) = x^2 e^{-x}$.

a) Domaine de définition de $f(x)$: $D_f =$ *(1 point)*
b) Calcul de limites : $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ *(2 points)*
c) Donner la fonction dérivée de $f(x)$
   i) $f'(x) = ?$ *(3 lignes)*
   ii) Pour quelle(s) valeur(s) de x $f'(x) = 0$ *(3 lignes ; 4 points)*
d) Tableau de variation : (Ajouter dans le tableau le points $A\left(-2\,;\, f(-2)\right)$) *(4 points ; tableau à remplir)*
e) Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (O, i, j) *(4 points ; repère orthogonal)*
f) Evaluer l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ *(5 points ; 7 lignes)*

Exercice 8

On se propose de déterminer la relation fonctionnelle liant la quantité achetée y de mangues francisques au prix *en gourde* d'une mangue francisque. On mène une petite enquête auprès d'un échantillon de 6 personnes choisies au hasard d'un groupe de consommateurs de mangues francisques.

On a eu les résultats suivants :

$(x_i\,;y_i)$:	$(x_1\,;y_1)$	$(x_2\,;y_2)$	$(x_3\,;y_3)$	$(x_4\,;y_4)$	$(x_5\,;y_5)$	$(x_6\,;y_6)$
Valeurs :	(2.00 ; 20)	(2.50 ; 18)	(3.10 ; 15)	(3.50 ; 12)	(4.20 ; 9)	(5.00 ; 6)

x_i = prix d'une mangue francisque de grosseur standard achetée par un consommateur i

y_i = quantité de mangues francisques de grosseur standard achetée par le consommateur i.

$(1 \leq i \leq 6)$

On définit : $\overline{x}_A = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$; $\overline{x}_B = \frac{x_4+x_5+x_6}{3}$; $\overline{y}_A = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ et $\overline{y}_B = \frac{y_4+y_5+y_6}{3}$

Calculer : $\overline{x}_A$, $\overline{y}_A$, $\overline{x}_B$ et $\overline{y}_B$ *(10 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2004-2005

Épreuve de Mathématiques **Durée : 1h30**

Exercice 1 *(7 points ; 9 lignes)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante et discuter suivant les valeurs du paramètre a :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \ln(a)$$

Exercice 2 *(16 points)*

Un employé vient de recevoir les propositions de l'entreprise « L'Unique » lui propose un salaire mensuel de $US 1200 et une augmentation de $100 par mois chaque 1[er] janvier. On désigne par u_0 le salaire de départ de l'employé et u_n son salaire après n mois de travail.

a) Déterminer u_0, u_1, u_2 ? *(3 points ; 6 lignes)*
b) terminer u_n en fonction de u_0 et de n. Quelle est la nature de u_n ? *(6 points ; 9 lignes)*
c) Si on note u_n la suite représentant les sommes que percevra l'employé après $n+1$ années dans l'entreprise. Montrer que : $u_n = 600(n+1)(n+24)$ *(7 points ; 9 lignes)*

Exercice 3 *(8 points)*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2\,;1\,;-5)$, $B(5\,;-3\,;-5)$ et $C(2\,;1\,;7)$.

Indiquer et justifier par une démarche analytique appropriée la nature du triangle ABC formé par ces trois points. *(8 lignes)*

Exercice 4 *(20 points)*

Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher dont $(n-1)$ boules blanches et $(n+1)$ boules noires $(n \in \mathbb{N}^*)$. On tire successivement et sans remise (les tirages sont équiprobables) deux boules de l'urne. On note $p(n)$ la probabilité d'avoir deux boules de couleurs différentes.

1. Calculer $p(1)$ et $p(2)$. Expliquer. *(4 points ; 4 lignes)*
2. Supposons que $n \in \mathbb{N} - \{0, 1, 2\}$.
   a) Combien y a-t-il de tirages équiprobables possibles ? *(3 points ; 3 lignes)*

b) De combien de manières on peut avoir une boule noire suivie d'une boule blanche? *(3 points ; 4 lignes)*

3. Déterminer :

a) $p(n), n \in \mathbb{N}^*$ *(5 points ; 4 lignes)*

b) l'entier ayant la probabilité la plus élevée possible. Calculer cette probabilité. *(5 points ; 8 lignes)*

Exercice 5 *(25 points)*

On considère la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}$

1. Donner le domaine de définition de $f(x)$: $D_f = ?$ *(1 point)*

a) On suppose que $x^2 - 2x - 3 > 0$. Calculer la dérivée première $f'(x) = ?$ *(2 points)*

Déterminer $\{x \in \mathbb{R} \,/\, f'(x) = 0\}$ *(2 points)*

b) Calculer :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ? \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = ? \qquad a = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = ?$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = ? \qquad a' = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = ?$$

$$b' = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - a'x) = ?$$ *(6 points)*

Conclusion: *(1 ligne)*

2. On suppose que : $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Déterminer :
   - La dérivée première : $f'(x) = ?$ *(2 points)*
   - $\{x \in \mathbb{R} \,/\, f'(x) = 0\}$ *(2 points)*
3. A partir de 1 à 3, remplir le tableau suivant :
   (3 points, tableau [x, $f'(x)$ et $f(x)$] à remplir)
4. Tracer la courbe représentative de $f(x)$ dans ce repère orthonormé :
   (3 points ; repère orthogonal)
5. Evaluer l'intégrale suivant: *(2 points)*

$$\int_0^2 \frac{-x+1}{\sqrt{-4x^2+8x+12}}\,dx$$

Exercice 6 *(10 points)*

On considère un nombre complexe $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Ecrire la forme trigonométrique du complexe z et de son conjugué $\bar{z}$.
(2 points ; 4 lignes)

b) Résoudre l'équation $z^4 = \bar{z}$ en utilisant les formes trigonométriques.
(8 points ; 8 lignes)

Exercice 7 *(14 points)*

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On considère trois plans P_1, P_2, P_3 d'équations respectives : $x + 2y + 5z = 2$; $2x + 4z = 3$; $-x - z = 0$.

a) Déterminer le point $M(x, y, z)$ tel que $AM = B$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Que représente alors le point $M(x, y, z)$? *(7 points ; 11 lignes)*

b) On écrit : $A = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$. Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, et\ \vec{u}_3$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, quelle est sa dimension ? Pourquoi ? *(7 points ; 10 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2006-2007

Épreuve de Mathématiques **Durée : 1h30**

Exercice 1 *(16 points)*

1. Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le vecteur $\vec{u} = (-3, 2)$. Donner les composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base (e_1, e_2) avec $e_1 = (2, 1)$ et $e_2 = (3, 2)$. *(6 points ; 8 lignes).*
2. Dans l'espace vectoriel $P_3(\mathbb{R})$ des polynômes de degré $\leq$ 2, montrer que les vecteurs $\vec{f_0}$, $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ définis par : $\vec{f_0} : x \longrightarrow 1$, $\vec{f_1} : x \longrightarrow x - 1$ et $\vec{f_2} : x \longrightarrow (x-2)(x-1)$ forment une base de $P_3(\mathbb{R})$. *(10 points ; 16 lignes)*

Exercice 2 *(10 points)*

Soit P un plan d'équation $x + 2y + z = 6$ dans l'espace d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

1. Déterminer les coordonnées de $\vec{n}$, un vecteur normal à P. *(2 points ; 4 lignes)*
2. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ le point du plan P tel que $\overrightarrow{OM} = k\vec{n}$, k étant un réel donné.
   a) Exprimer x, y, et z en fonction de k. *(3 points ; 4 lignes)*
   b) Déterminer les coordonnées de M. *(8 points ; 6 lignes)*

Exercice 3 *(16 points)*

Dans une enquête on pose quatre questions à chacune desquelles le questionné doit répondre par oui ou par non.

a) Combien y a-t-il de réponses possibles ? *(6 points ; 5 lignes)*
b) Quelle est la probabilité d'avoir ***au moins deux « oui »*** ? *(10 points ; 7 lignes)*

Exercice 4 *(8 points)*

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$x\,\mathcal{R}\,y \iff (x^3 + 2)(y^2 + 1) = (y^3 + 2)(x^2 + 1)$. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. *(14 lignes)*

Exercice 5 *(20 points)*

On considère la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - |1-x|}{|x|}$$

1. Donner le domaine de définition de $f(x)$: $D_f = ?$ *(1 point)*

2. Evaluer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = ? \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = ? \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = ? \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$$

(2 points)

Conclusion : *(1 ligne)*

3. Calculer la dérivée première $f'(x)$, ***les éventuels extrema et points remarquables*** de $f(x)$ en faisant les considérations qui incombent. *(5 points ; 15 lignes)*
4. Déterminer les constantes a et b de la droite $y = ax + b$ telles que $f(x) = y + \varepsilon x$. Commenter. *(2 points ; 10 lignes)*
5. **À partir de 1 à 3**, remplir le tableau suivant : *(3 points ; tableau vide à remplir)*
6. Tracer la courbe représentative de $f(x)$ dans un repère orthonormé.
   (3 points ;repère orthogonale)
7. Evaluer l'intégrale : $\int^{2} f(x)dx = ?$ *(2 points ; 10 lignes)*

Exercice 5 *(10 points)*

On considère une suite numérique (u_n) de premier terme $u_0 = 0$. En supposant que (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$, démontrer que $u_n = q^n u_0$ *(16 lignes)*

Exercice 6 *(10 points)*

Donner une forme exponentielle du nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$, $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ *(9 lignes)*

Exercice 7 *(10 points)*

J'ai acheté plusieurs pièces de tissu pour \$180. si j'avais acheté pour la même somme trois pièces de tissu de plus, j'aurais eu la pièce de tissu à un meilleur marché de \$3. Combien ai-je acheté de pièce de tissus ? *(12 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUEE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2008-2009

Épreuve de Mathématiques **Durée : 1h30**

Exercice 1 *(8 points)*

On considère le nombre complexe $z=(0.4+0.3i)^{5+2i}$. Mettre z sous la forme d'un nombre complexe $z=a+bi$ où a et b sont des réels à déterminer. ***(9lignes)***

Exercice 2 *(5 points)*

Démontrer qu'il existe un entier $n \in IN^*$ tel que $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}=n+\sqrt{2}$. En déduire la valeur de l'expression $Q=\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+2\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\right)^2$. ***(12 lignes)***

Exercice 3 *(8 points)*

A l'intérieur d'un triangle équilatéral E_0 de ***1m de côté***, on construit un triangle équilatéral E_1 en plaçant ses sommets sur les milieux des côtés de E_0. On construit ensuite, à l'intérieur du triangle E_1, un second triangle équilatéral E_2 en plaçant ses sommets sur les milieux des côtés de E_1 et ainsi de suite, indéfiniment. En notant p_i le périmètre du triangle E_i, calculer la somme S des périmètres de tous ces triangles. ***(9 lignes)***

Exercice 4 *(20 points)*

On lance une pièce de monnaie pipée de telle sorte que la probabilité d'avoir Pile soit 1.5 fois de celle d'avoir face.

1. Quelle est la probabilité d'avoir Pile ? Face ? ***(2 points ; 5 lignes)***
2. On lance cette Pièce de monnaie cinq fois. On désigne par la variable aléatoire X « le nombre de faces obtenu au cours de ces cinq lancers ». Déterminer l'ensemble des valeurs D_X de X et $P(X=x)$, $\forall x$. Evaluer $E(X)$. ***(12 points ; 10 lignes)***
3. On s'intéresse de préférence au nombre de lancers nécessaires à l'obtention de Pile pour la première fois. Quelle est la probabilité d'obtenir ce résultat au cinquième lancer ? ***(6 points ; 5 lignes)***

Exercice 5 *(17 points)*

On considère, dans *IR*, la fonction f définie par : $f(x)=e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de *f(x)* : D_f = ? (1 point)

b) Calculer :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)\ ;\ \lim_{x\to1^+} f(x)\ ;\ \lim_{x\to1^-} f(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0^+)}{x}\right) \quad (5\ points)$$

Conclusion. *(2 points ; 1 ligne)*

c) Soit $y = f(x)$. Démontrer que $\ln(y)\ln(x) = 1$. En déduire que la droite $y = x$ est axe de symétrie pour la courbe de $y = f(x)$. Déterminer, s'il(s) existe(nt), le(s) point(s) d'intersection de la courbe avec l'axe de symétrie. *(3 points ; 8 lignes)*

d) Calculer la dérivée première $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction. *(3 points ; 1 ligne et un tableau à remplir)*

e) Tracer la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$. *(3 points ; repère orthogonal)*

Exercice 6 *(10 points)*

On considère le polynôme $P(x) = (1+x)^{10}$, $x \in IR$.

a) Calculer $\int P(x)dx$ *(1 point ; 3 lignes)*

b) Développer $P(x)$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Donner alors une autre expression de $\int P(x)dx$ en utilisant la formule développée. *(5 points ; 7 lignes)*

c) En déduire de a) et de b) la valeur de l'expression :

$$E = 1 + \frac{1}{2}C_{10}^{1} + \frac{1}{3}C_{10}^{2} + ... + \frac{1}{11}C_{10}^{10}.$$ *(4 points ; 5 lignes)*

Exercice 7 *(8 points)*

Dans un triangle équilatéral ABC, on joint le sommet A à un point D situé au quart de BC à partir de C. En supposant que le coté AB est de longueur *a*, calculer la longueur de AD :

a) en fonction de la longueur *a*. *(5 points ; 11 lignes)*

b) En fonction de la hauteur *h* du triangle. *(3 points ; 4 lignes)*

Exercice 8 *(24 points)*

On considère l'ensemble des matrices $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $(M_\lambda)^2$ et $(M_\lambda)^3$. En déduire l'expression de $(M_\lambda)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *(5 points ; 6 lignes)*
2. Calculer $S_n = |M_\lambda| + |(M_\lambda)^2| + |(M_\lambda)^3| + ... + |(M_\lambda)^n|$ avec $|\lambda| < 1$

   $|...| =$ Déterminant. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. *(7 points ; 6 lignes)*
3. L'ensemble des matrices M_λ est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux? Démontrer (10 points). Si oui, quelle est sa dimension ? Expliquer. *(2 points ; 15 lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2009-2010

Durée : 1h30

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1 *(7 points)*

On considère le nombre complexe $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que $|z| = 1$ (4 points) *(8 lignes)*

b) Sachant que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer λ. *(3 points ; 10 lignes)*

Exercice 2 *(8 points)*

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ae^{bx}\cos(cx + d)$ où a, b, c et d sont des réels. Démontrer que $f''(x) = 2bf'(x) - (b^2 + c^2)f(x)$ *(13 lignes)*

Exercice 3 *(20 points)*

Geolfils est chargé d'étiqueter huit objets distincts disposant de huit étiquettes différentes dans le cadre d'une petite fête organisée pour quatre couples mariés.

1. ***Combien d'objets*** peut-il étiqueter convenablement (chaque objet à l'étiquette qui le correspond) si l'on sait que :
   a) Un objet n'a pas été convenablement étiqueté. Expliquer. *(2 points ; 5 lignes)*
   b) Deux objets et deux seulement n'ont pas été convenablement étiquetés. Expliquer. *(2 points ; 4 lignes)*
   c) Trois objets n'ont pas été convenablement étiquetés. Expliquer. *(6 points ; 6 lignes)*

2. Geolfils est chargé maintenant chargé de placer par tirage au sort les membres de ces quatre couples mariés autour d'une table ronde de huit places. On définit l'événement A : « chacun des couples est réuni »
   a) Déterminer le cardinal de A ($\#A$). Expliquer. *(6 points ; 5 lignes)*
   b) Quelle est la probabilité d'avoir A. Expliquer. *(4 points ; 4 lignes)*

Exercice 4 *(6 points)*

On définit : C_n^k = combinaison de n éléments pris k à k où $k \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{C_n^k}{n^k}\right)$, k étant fixé dans $\mathbb{N}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{C_n^8}{n^8}\right)$ *(7 lignes)*

Exercice 5 *(10 points)*

On considère un segment $[AB]$ de longueur l. On note par M_1 le milieu de $[AB]$, M_2 le milieu de $[BM_1]$, M_3 le milieu de $[M_1M_2]$, M_4 le milieu de $[M_2M_3]$, … , M_n le milieu de $[M_{n-2}M_{n-1}]$.

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2009-2010

Durée : 1h30

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1 *(7 points)*

On considère le nombre complexe $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, $\forall \lambda \epsilon \mathbb{R}$.

a) Démontrer que $|z| = 1$ (4 points) *(8 lignes)*

b) Sachant que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer λ. *(3 points ; 10 lignes)*

Exercice 2 *(8 points)*

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ae^{bx}\cos(cx+d)$ où a, b, c et d sont des réels. Démontrer que $f''(x) = 2bf'(x) - (b^2 + c^2)f(x)$ *(13 lignes)*

Exercice 3 *(20 points)*

Geolfils est chargé d'étiqueter huit objets distincts disposant de huit étiquettes différentes dans le cadre d'une petite fête organisée pour quatre couples mariés.

1. ***Combien d'objets*** peut-il étiqueter convenablement (chaque objet à l'étiquette qui le correspond) si l'on sait que :
   a) Un objet n'a pas été convenablement étiqueté. Expliquer. *(2 points ; 5 lignes)*
   b) Deux objets et deux seulement n'ont pas été convenablement étiquetés. Expliquer. *(2 points ; 4 lignes)*
   c) Trois objets n'ont pas été convenablement étiquetés. Expliquer. *(6 points ; 6 lignes)*

2. Geolfils est chargé maintenant chargé de placer par tirage au sort les membres de ces quatre couples mariés autour d'une table ronde de huit places. On définit l'événement A : « chacun des couples est réuni »
   a) Déterminer le cardinal de A ($\#A$). Expliquer. *(6 points ; 5 lignes)*
   b) Quelle est la probabilité d'avoir A. Expliquer. *(4 points ; 4 lignes)*

Exercice 4 *(6 points)*

On définit : $C_n^k =$ combinaison de n éléments pris k à k où $k \leq n$, $n \epsilon \mathbb{N}^*$.

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{C_n^k}{n^k}\right)$, k étant fixé dans $\mathbb{N}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{C_n^8}{n^8}\right)$ *(7 lignes)*

Exercice 5 *(10 points)*

On considère un segment $[AB]$ de longueur l. On note par M_1 le milieu de $[AB]$, M_2 le milieu de $[BM_1]$, M_3 le milieu de $[M_1M_2]$, M_4 le milieu de $[M_2M_3]$, … , M_n le milieu de $[M_{n-2}M_{n-1}]$.

a) Déterminer M_n en fonction de l et n. *(2 points ; 3 lignes)*

b) On pose $S_n = M_1 + M_2 + \cdots + M_n$. Calculer S_n et en déduire sa limite quand $n \longrightarrow +\infty$. *(8 points ; 4 lignes)*

***Exercice 5** (16 points)*

On considère, dans $\mathbb{R}$, la fonction f définie par : $f(x) = x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x)$. $D_f = ?$ *(1 point)*
2. Calculer les limites aux bornes. (5 points[1 point par limite])
   Conclusion. *(1 point ; 2 lignes)*
3. Calculer la dérivée première $f'(x)$ ***en faisant les considérations convenables*** et dresser le tableau de variation de la fonction. *(5 points ; 6 lignes et un tableau)*
4. Tracer la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$.
   (3 points ; un repère orthogonal)

***Exercice 6** (8 points)*

La grande base AB, de longueur ***b***, d'un trapèze ABCD est le double de la petite base CD qui est égale à la hauteur AD.

a) Calculer les diagonales du trapèze en fonction de ***b***. *(5 points ; 9 lignes)*

b) En notant I le point de rencontre des diagonales du trapèze, calculer AI, BI, CI et DI. *(3 points ; 4 lignes)*

***Exercice 7** (25 points)*

Soient E et F deux espace vectoriels réels et f une application linéaire de E dans F. on donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E.

a) Donner la ***négation*** de la proposition : $(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$ est libres, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre.
   (2 points ; 2 lignes)

b) Montrer que si $(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$ est libre, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre en utilisant la négation.
   (10 points ; 7 lignes)

c) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$. Monter que si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, alors $(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$ est forcément lié. *(5 points ; 4 lignes)*

d) On suppose que f est injective. Monter que si $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre, alors $(f(\vec{u}), f(\vec{v}))$ est libre en utilisant la négation. *(8 points ; 6lignes)*

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2010-2011

Épreuve de Mathématiques

Exo1 On veut disposer un certain nombre de jetons en carré. En essayant de constituer un premier carré, on s'aperçoit qu.il reste 14 jetons inutilisés. On essaie de former alors un autre carré en mettant un jeton en plus sur chaque côté. Il manque alors 11 jetons. Combien avait-il de jetons?

Exo2 A. Milcé qui devait donner très tôt son cours au CTPEA, a rencontré son ami Valès avec ses deux filles qu'il menait à l'école. La fille ainée demanda à son père son âge. Valès lui dit: j'ai trois fois ton âge plus 50 moins huit fois l'âge de ta sœur. Rappelle-toi que tu as 5 ans et que ta sœur en a 3. Quel âge Milcé a-t-il?

Exo3 Le mur d'une étable a 75 m de long. Le propriétaire veut appuyer un enclos rectangulaire contre ce mur. Il dispose de 100 m de clôture. Déterminer les dimensions x et y pour que l'aire a de l'enclos soit la plus grande possible.

Exo4 Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse :

a) $\int_0^2 3t\,dt = \int_0^2 3u\,du$

b) $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}dt = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{2}$

c) $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$

4:2- Soit p une projection ponctuelle :

d) Si $A \neq B, alors\ P(A) \neq P(B)$

e) Si p(A) = p(B), alors p(B)=B.

f) On peut avoir $p(D) = \{A\}$, où D est une droite et A un point du plan

4.3-

g) Dans ₵, une équation du second degré, à coefficients réels, qui a une solution complexe non réelle n'a pas de solution dans R.

h) Dans ₵, une équation du troisième degré, à coefficients réels, admet exactement trois solutions complexes non réelles.

i) Soit z un complexe non nul, les points d'affixe 0, z, $\frac{1}{z}$ sont alignés.

4.4-

j) Toute suite numérique strictement décroissante et minorée a pour limite zéro.

k) Toute suite numérique convergente est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée.

Exo 5

a) Soit f une symétrie vectorielle d'un espace vectoriel E2 dont la matrice dans une base est $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & y\end{pmatrix}$. Alors

y=........ et x=....... Justifiez :.............

b) Soient D et D`, deux droites strictement parallèles. On donne $(A,B)\in D^2$ et $M\in D'$. Montrer que l'aire du triangle ABM est indépendante de la position du point M sur D'.

c) Soit la fonction *f* définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+}{x-2}$. Alors les asymptotes sont.........

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année
Année 2011-2012

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1 (5 pts)
Nerline, âgée de 34 ans, a deux filles, Anne-Nerly et Arli. La première est huit fois plus âgée que la seconde. Alors Arli est âgée de

....
....
....

Exercice 2 (10 pts) (N.B. Schematiser la (les) trajectoire(s)).
Alors que A. Milcé élaborait le texte du concours d'entrée au CTPEA, sa fille Anne-Nerly parcourait 300 mètres vers l'Ouest, bifurquait vers le Nord pour s'immobiliser après 400 mètres en pleurant. A. Milcé doit la ramener d'urgence à la maison. Alors, au minimum, il devait parcourir

....
....
....
....

Exercice 3 (6pts)
On dispose de 30 pièces, les unes valant 2 Gdes et les autres 5 Gdes. En utilisant les 30 pièces peut-on obtenir une somme totale de 81 Gdes?

....
....
....
....

Exercice 4 (12 pts)

Dans ce texte "a" représente un chiffre. Déterminer *a* dans les cas suivants:

a) 7a2+2a0+2a5+5a7+2a6 = 2 220: (3 p t s)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

b) 1a4 + a21 + 11a + a01a = 3 581: (3 points)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

c) 1a2*a31+2aa-31a = 14 572: (3 points)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

d) 3a1+8*a31 = 6a3: (3 points)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Exercice 5 (15 pts)

Les relations suivantes sont-elles correctes? Expliquer et justifier.

a) $\forall x \in R$; exp(ln x) = x: (3 p t s)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

b)) $\forall x \in R$, Arc cos(cos x) = x: (3 p t s)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

c $\forall y \in [0;1]$, sin(arcsin y) = y: (3 p t s)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

d $\forall t \in [\pi;2\pi]$, arcsin(sin t) = t: (3 p t s)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

e) $\forall t \in [\pi;2\pi]$, arccos(cos t) = t: (3 p t s)

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

Exercice 6 (6pts)

Soit $n \in N^*$ a1... an des réels. Alors $\int_0^{\pi}(a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots a_n \cos nx)dx =$

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

....

....

Exercice 7 (10 pts)

Parmi les énoncés suivants, quels sont ceux qui sont vrais? (justifier la réponse).

a) Au moins l'une des deux propositions suivantes (portant sur les droites d'un espace de dimension 3) est conséquence de l'autre :

i) Les droites l_1, l_2, l_3 sont coplanaires.

ii) Les droites l_1, l_2, l_3 se coupent deux-à-deux. (5 p t s)

....

....

....

....

b) Il existe des réels b1, b2, ..., bn tels que, pour tout x; on ait : $b1 \cos x + b2 \cos 2x + \ldots + bn \cos nx > 0$: (5 points)

....

....

....

....

Exercice 8 (10 pts)

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = \cos 3x + \sin 3x$:

a) Montrer que f est périodique et préciser sa plus petite période T: (5 p t s)

....

....

....

b) Montrer que f admet un maximum sur [0; T]: Déterminer alors ce maximum. (5 p t s)

....

....

....

Exercice 9 (10 pts)

Une marchande de quatre saisons utilise une balance faussée, car les bras de levier l1; l2 sont égèrement différents. Se voulant être équitable elle fait un double pesé et attribue au client la moyenne arithmétique des résultats: Le client est-il volé, malgré la bonne foi de la marchande? Sinon comment devrait-elle procéder? (Justifier)

....

....

....

....

....

....

Exercice 10 (16 pts)

D'habitude, les diplômés du Bac II des grands collèges de Port-au-Prince viennent en groupe s'inscrire au CTPEA de manière à avoir des numéros d'ordre rapprochés. Pourquoi? Personne ne le sait encore. Le CTPEA cherche à comprendre cette situation de manière à prendre des décisions appropriées.

On suppose, pour cette année ci, pour simplifier, que le nombre total d'inscrits est de cinq desquels deux proviennent de ce petit groupe de grands collèges. On suppose que les postulants sont regroupés dans une même salle sur cinq chaises rangées l'une après l'autre.

1) Quelle est la probabilité que ces deux qui proviennent des grands collèges ne soient pas assis l'un derrière l'autre? (4 p t s)

....

....

....

2) On désigne par X "le nombre de postulants ne provenant pas de grands collèges qui s'intercalent entre ces deux".

a) Donner l'ensemble DX des valeurs de cette variable aléatoire. Expliquer. (2 p t s)

....

....

....

b) Déterminer P(X = x), $\forall x \in R$. (4 p t s)

....

....

c) Calculer E(X) et V(X). (6 p t s)

....

....

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE

(CTPEA)

Concours d'entrée en première année

Année 2012-2013

Épreuve de Mathématiques

N.B.: .La qualité de la rédaction, la clarté, la précision, la cohérence des idées et les explications supplémentaires aux calculs sont des facteurs non négligeables dans l'appréciation de la copie.

Autre qu'une calculatrice autonome, non imprimante et non programmable, aucun document n'est autorisé. Prière de ne pas composer au crayon, d'utiliser le verso comme brouillon, de répondre directement sur la feuille (recto seulement).

Exercice 1 (40 pts)

Infirmer ou confirmer les propositions suivantes :

a) Soient les fonctions :

$$f : R \to R \quad x \mapsto \ln(x^2 - 1) \qquad \text{et} \qquad g : R \to R \quad x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$$

Alors $f = g$.

....

....

....

b) Soit h une fonction définie sur R et Ch sa courbe représentative. Si Ch a un centre de symétrie alors Ch n'a pas d'axe de symétrie.

c) Soit f une fonction continue sur R_+^*

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors f est bornée sur R_+^*

d) Soit $a \in R$: L'équation ln x = a admet toujours des solutions dans R.

e) Soit $b \in R$ L'équation exp(x) = b admet toujours des solutions dans R.

Soient A; B; C; D quatre points non coplanaires de l'espace, f une isométrie.

f) Si f(A) = B et f(B) = A alors la droite (AB) est invariante par f:

g) Si f(A) = A; f(B) = B; f(C) = C alors f est soit l'identité, soit la réflexion du plan (ABC):

h) Si f(A) = A; f(B) = B; f(C) = C; f(D) = D alors f est une réflexion:

Exercice 2 (10 pts)

Combien de fois utilise-t-on le chi¤re 2 lorsqu.on écrit tous les entiers de

a) 1 à 1999?

b) 1 à 2012?

Exercice 3 (10 pts)

Au CTPEA, le quart des étudiants ne fait pas d'espagnol, le tiers ne fait pas d'anglais, 300 pratiquent les deux langues, et un douzième des élèves ne pratique aucune de ces deux langues. Combien d'étudiants n'étudient que l'espagnol?

Exercice 4 (10 pts)

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O; I; J). Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z

$$|z-1-2i| = |z-7+2i|$$

Exercice 5 (25 pts)

On suppose que le taux d'inflation mensuel est constant et égal 1%. Cn désigne la valeur réelle d'un capital au bout du nième mois d'un capital de valeur initiale C0 au premier janvier 2012.

a) Exprimer Cn en fonction de n et C0

b) Déterminer la valeur réelle du capital le 31 décembre 2012 sachant que le premier janvier 2012 sa valeur est 1000 gourdes

c) Quelle serait la valeur du capital de valeur initial C0 au 31 décembre 2012 si le taux d'inflation était de 12% par an?

d) Quelle est l'inflation la plus élevée : 1% par mois ou 12% par an?

e) Déterminer le taux d'inflation mensuel x qui aboutit à une inflation de 12% par an (en supposant que x est constant durant chaque mois).

Exercice 6 (5 pts)

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{27}\,dx$$

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ECONOMIE APPLIQUEE (CTPEA)

Epreuve de Math

Examen 2014

Exercice 1

Résoudre dans R l'équation : E $(\sqrt{x^2+1}) = 2$. **(E désigne la fonction partie entière)**

Exercice 2

On considère la fonction f définie par f(x) = $|x^2 - 1|, \forall x \in R$.

a) En utilisant la définition, montrez que f est dérivable à gauche de 1.
b) En utilisant la définition, montrez que f est dérivable à droite de 1.
c) Que peut-on dire de la dérivabilité de f en 1 ?

Exercice 3

Soient A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deux éléments de M_2 (R).

3.1 On considère les deux éléments A et B

a) Calculez $A^2 - B^2$ et (A+B)(A-B).

b) Calculez $(A-B)^2$ et $A^2 - 2AB + B^2$.
c) Que Remarquez- vous?
d) Que peut-on conclure ?

3.2. On considère l'élément B

a) quel est le nombre d'éléments possibles de M_2 (R) peut-on former avec les éléments de B en supposant qu'il n'y a pas de remisse ? (20 pts)

b) Quelle est la proportion d'éléments établis en a) dont le déterminant est égal a 2?

Exercice 4

Voici les résultats d'une enquête menée auprès de 100 personnes :

Ont visité	Nombre
Saint-Marc	80
Le Cap	50

Les Cayes	35
Saint-Marc et le Cap	40
Saint-Marc et les Cayes	20
Le Cap et les Cayes	10
Les trois villes	9

a) Représentez les résultats de l'enquête dans un diagramme de Venn.

b) Beaucoup de gens affirment que les nombres données sont exacts. Qu'en pensez- vous ?

CENTRE DE TECHNIQUES DE PLANIFICATION ET D'ECONOMIE APPLIQUEE

(C.T.P.E.A)

Concours d'entrée en Première Année : Promotion 2015-2019

Epreuve de Mathématiques

Utiliser le verso pour Brouillon **Interdit de composer au crayon** **Vendredi 2 Octobre 2015**

Nom :....................................... **Prénom : ....**

Numéro de code : .... **Note sur 300 : ....**

Consigne:

. Aucun détail n'est demandé. Répondez directement sur la feuille

.Aucun document, quel que soit son type, n'est autorisé

. Pas de calculatrice

. Durée de l'épreuve : 2h00

. Les exercices sont obligatoires et peuvent être traités dans l'ordre voulu

Partie 1 (60 points)

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ?

1. Si une fonction admet une limite finie en un point de R alors elle est définie en ce point.
2. Si deux fonctions f et g ont même limite en $x_0 \in R$, alors $lim_{x_0}(f - g) = 0$.

3. Si deux fonctions f et g ont même limite en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x_0} \frac{f}{g} = 1$.
4. Si une fonction admet une limite à gauche et une limite à droite en $x_0 \in \mathbb{R}$ alors f admet une limite en x_0
5. Si la dérivée d'une fonction est positive ou nulle sur un intervalle ouvert I, alors f est croissante sur I.
6. La fonction dérivable $f : [0 ; 1] \to IR$ atteint un maximum en $x_0 \in [0;1]$, alors $f'(x_0) = 0$

Partie 2 (70 points)

Q1 – La quantité $(x\%\text{ de a}) + (y\%\text{ de b})$ est égale à :

A: $(x+y)\%$ de $(a+b)$ B: $xa+yb$ C: $\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{a}\right)\%$ de ab D: 0

Q2 – La quantité $100[(x\%\text{ de } a)(y\%\text{ de } b)] - [(xy)\%\text{ de } (ab)]$ est égale à :

A: $(99xy)\%$ de (ab) B: $xy-ab$ C: $\frac{99xy}{ab}$ D: 0

Q3 – La valeur de $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)-t}{2^t-1}$ est égale à :

A : 0 B : 1 C : 2 D : $ln2$

Q4 – Soit $f : [0 ; 1] \to IR$. Une condition suffisante pour que $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x . f(x))$ existe dans IR est :

A : f a une limite en 0 B : f a une limite à droite et une limite à gauche de 0 C : f est bornée en 0.

Q5 – La valeur de $\int_{-1}^{1} xe^{-|x|}\,dx$ est égale à :

A: 1 B: $e-1$ C: $ln2$ D: 0

Q6 – En utilisant un changement de variable $x = \frac{1}{y}$, la valeur de $\int_{1/3}^{3} \frac{dx}{x^5+x}$ est égale à :

A : 1 B : e C : $ln3$ D : 0

Q7 – Sur $]0, +\infty[$, la valeur minimale de $f(x) = e^x - 2x$ est égale à :

A : 0 B : $ln6$ C : $2-ln2$ D : 1

Partie 3

Exercice 1 (20 points)

Dans le premier magasin, Jean a dépensé 1 G de plus que la moitié de la somme qu'il avait en rentrant. Dans le second magasin, il a dépensé le tiers de ce qui lui restait en sortant du premier magasin. On désigne par S (en gourdes) la somme qu'il avait en rentrant dans le premier magasin. Exprimer en fonction de S ce qu'il reste à Jean après les deux achats.

Exercice 2 (30 points)

Si on ajoute l'âge de Norbert au double de l'âge de Phinette, on trouve 20. Si on retranche l'âge de Phinette du double de l'âge de Norbert, on trouve 10. Trouver l'âge de Norbert et l'âge de Phinette.

Partie 4 (40 points)

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $A-2I =$………… $(A-2I)^2 =$ ……… $(A-2I)^3 =$ ………

2. On en déduit que A est inversible et en fonction de A et I, $A^{-1} =$………

Partie 5 (80 points)

Un grand centre hospitalier contient huit sections $S_1, S_2, \ldots, S_8$. Six malades arrivent.

1. En supposant que les sections sont non spécialisées c'est à dire que toutes les sections offrent les mêmes soins, Quelle est la probabilité que :

a) Deux malades se rendent à une même section, les autres se rendent chacun à des sections différentes et différentes de la précédente ?

b) un malade se rende à une section, deux à une autre et trois à une autre ?

2. En supposant que les sections sont spécialisées c'est à dire que chacune des sections offre des soins différents, Quelle est la probabilité que :

a) Deux malades se rendent à une même section, les autres se rendent chacun à des sections différentes et différentes de la précédente ?

b) un malade se rende à une section, deux à une autre et trois à une autre ?

NB. Les réponses à cette partie 5 doivent être données au dix millièmes près.