MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

BACCALAURÉAT DEUXIÈME PARTIE

SESSION EXTRAORDINAIRE – AOÛT 2014

PHILO C-D

MATHÉMATIQUES

Maîtriser

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit *2. Le téléphone est interdit dans les salles*
3. L'épreuve comporte trois parties. *4. Le silence est obligatoire*

Durée de l'épreuve : 4 heures

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (30 pts / 3 pts par question).

1- Soit M une matrice carrée d'ordre 3 définie par :

$$M=\begin{pmatrix}4 & 3 & -3\\ 3 & 4 & -3\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix}. \quad \text{Si} \quad I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{alors}$$

$M^2-5M+4I_3$ est égale à ....

2- Soit (U_n) une suite réelle. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2-\frac{1}{n}\leq U_n\leq 2+\frac{1}{n}$, alors la limite de cette suite est ....

3- Soit $z=\frac{2}{1-i}$ un nombre complexe, la forme matricielle associée à z est ..1 + i....

4- On lance deux « dés » dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe les nombres marqués sur les faces supérieures des « dés ». La probabilité d'obtenir une somme égale à 6 est $p=$ ....36/6....= 6

5- La limite de la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n=\frac{2n+3}{-n-5}$ est le réel ....

6- Soit X une variable aléatoire telle que $E(X)=-1$ et $\sigma(X)=3$, alors $E(1-2X)=$ .... et $V(X+9)=$ ....

7- Un argument du nombre complexe $z=-2(\cos x-i\sin x)$ est ....

8- La valeur moyenne sur [1; 3] de la fonction : $x\mapsto\frac{1}{x}$ est égale à ....

9- La fonction dérivée première de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(1+e^x)$ est ....

10- Soit $\vec{P}$ et $\vec{D}$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace E sur $\mathbb{R}$ de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ définis par :

$\vec{P}: x+3y-4z=0 \quad \vec{D}: \frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{a};\quad a\in\mathbb{R}^*$. Les sous-espaces vectoriels $\vec{P}$ et $\vec{D}$ ne sont pas supplémentaires dans E pour $a=$ ....

PARTIE B.- [illegible]

b) En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D.

3) Étudier le sens de variation de f, puis construire $(\mathscr{C})$.

4) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par $(\mathscr{C})$, (D) et les droites d'équation $x=\ln 2$ et $x=\ln 8$.

PARTIE C.- Traiter deux (2) des quatre (4) exercices suivants :(40 points)

1- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonorm direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

2) On considère les points :

- A d'affixe $a=\sqrt{3}-i$.
- B d'affixe $b=\sqrt{3}+i$.
- C, le milieu du segment $[OB]$, d'affixe c.

a) Déterminer une forme exponentielle a, b et c.

b) Placer les points A, B et C dans le rep $(O;\vec{u},\vec{v})$.

c) Montrer que le triangle (OAB) équilatéral.

2- On définit sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ un suite réelle (U_n) telle que :

$$S_n=U_0+...+U_n=3n^2+10n+7.$$

1) Calculer S_0, S_1 et S_2. En déduire U_0, U_1 et U_2.

2) Pour $n\geq 1$, calculer S_{n-1} en fonction de n.

3) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique do on précisera la raison. En déduire la monotonie la convergence de la suite.

3- Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs -8; 3; 4; 7 et 9. On note :

$U_1=p(X=-8)$; $U_2=p(X=3)$; $U_3=p(X=$
$U_4=p(X=7)$ et $U_5=p(X=9)$.

1) Sachant que U_1, U_2 ...., U_5 sont les term consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ déterminer la loi de probabilité de X.

2) Déterminer l'espérance mathématique de X.

3) Déterminer l'écart-type de X.

4- Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère l'endomorphisme φ de défini par :

(1 à 10). (30 pts / 3 pts par question).

Si f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{x}$, alors la limite de f quand x tend vers plus l'infini est ...2......

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-x+\ln(-x)$. Le domaine de définition de f est]−∞, 0[.

On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$. La forme algébrique de z^2 est ....

On lance un dé non pipé, numéroté de 1 à 6, l'évènement : « le résultat obtenu est différent de 2 » a pour probabilité ....

Pour la suite (U_n) définie par $U_0=0$ et pour tout entier n par $U_{n+1}=\dfrac{2U_n-4}{3U_n+2}$, $U_4=$ ....

Soit A et B deux évènements indépendants d'un espace probabilisé fini $(\Omega,P(\Omega),p)$. Soit $\overline{A}$ l'évènement contraire de A. Si $p(\overline{A})=0{,}2$ et $p(A\cap B)=0{,}16$, alors $p(A\cup B)=$ ....

La forme trigonométrique du nombre complexe $Z=3e^{-i\frac{5\pi}{3}}$ est $Z=$ ....

Dans l'espace vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, si $\overrightarrow{D}$ est une droite vectorielle d'équations $2x=-y=\dfrac{z}{3}$, alors son orthogonal $\overrightarrow{D}^{\perp}$ est un plan vectoriel d'équation ....

U est la suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$. La valeur de U_{1515} sachant que $U_3=-3$ est ....

0- On considère une homothétie h d'un plan affine ε_2 de repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ définie par : $\begin{cases} x'=3x-4 \\ y'=3y-6 \end{cases}$

Le centre de h est le point Ω de coordonnées .... et ....

PARTIE B.- Obligatoire (30 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\dfrac{1}{3}x$. $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=\dfrac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.

c) Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ de f par rapport à la droite (D).

d) Montrer que, pour tout réel x, $f(x)=\ln(e^x+1)-\dfrac{2}{3}x$.

En déduire la limite de f en $-\infty$.

e) On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout réel x $f'(x)=\dfrac{e^x-2}{3(e^x+1)}$.

f) En déduire les variations de f puis tracer $(\mathscr{C})$.

PARTIE C.- Traiter deux (2) des quatre (4) exercices suivants :(40 points)

1- On considère la suite (U_n) définie par : $U_0=1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\dfrac{5U_n}{3U_n+5}$.

On introduit la suite (V_n) définie par $V_n=\dfrac{5}{U_n}$.

1) Prouver que la suite (V_n) est arithmétique. En déduire V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
2) Déterminer le comportement à l'infini de la suite (U_n).

2- Une urne contient dix boules : cinq vertes, trois rouges et deux noires. Un joueur tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. S'il obtient deux boules vertes, il gagne 4 gourdes. Sinon, il perd 2 gourdes pour deux boules rouges, 5 gourdes pour deux boules noires et 1 gourde pour deux boules de couleurs différentes. On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur.
1) Quelles sont les valeurs prises par G?
2) Définir la loi de probabilité de G.
3) Calculer l'espérance et l'écart-type de G. Ce jeu est-il équitable?

3- On considère le polynôme P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ défini par :
$P(z)=z^3+(-9+4\sqrt{3})z^2+(43-24\sqrt{3})z-75+36\sqrt{3}$.
1 Vérifier que $P(3)=0$.
2) Déterminer les nombres réels a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

4- Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E défini par :
$f(\vec{i})=\dfrac{1}{2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$; $f(\vec{j})=\vec{j}$; $f(\vec{k})=\dfrac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$.
1) Trouver la nature de f.
2) Déterminer les deux sous-espaces vectoriels E' et E'' de E qui caractérisent f (base et direction).