SESSION DES RÉ[...]

**PHILO C-D**

**MATHÉMATIQUES**

*Consignes:*
*1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit.*
*2. Le port du téléphone est interdit dans les salles.*
*3. L'épreuve comporte trois parties.*
*4. Durée de l'épreuve: 3 heures.*

**PARTIE A.- Reporter sur la feuille de mise au net la question accompagnée de la réponse jugée correcte (1 à 10). 3 pts par question.**

1- L'inéquation $e^{2x^2-3x-5} \leq \left(e^2\right)^2$ admet pour ensemble solutions dans $\mathbb{R}$.

- $\left[\frac{-2}{3}, 3\right]$
- $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [3, +\infty[$
- $\left]\frac{-3}{2}, 3\right[$
- $\left[\frac{-3}{2}, 3\right]$

2- La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction numérique $x \mapsto x^2$ qui s'annule en 1 est définie par:

- $x \mapsto \frac{x^3}{3}$
- $x \mapsto 2x$
- $x \mapsto 2x - 2$
- $x \mapsto \frac{x^3 - 1}{3}$

3- La somme des 100 premiers termes de la suite: 3, 5, 7, 9, … est:

- 10200
- 10150
- 2040
- 10300

4- La limite de la suite $(U_n)$ telle que $U_n = \frac{\ln(1+n)}{n+1}$ (où ln désigne le logarithme népérien) quand $n \to +\infty$ est:

- 1
- 0
- $\frac{1}{2}$
- 2

5- On jette en même temps deux dés cubiques non truqués dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on observe après immobilisation leurs faces supérieures. La probabilité de l'événement « la somme des nombres inscrits sur les faces observées des deux dés est strictement supérieure à 8 et multiple de 3 » est:

- $\frac{5}{8}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{17}{36}$
- $\frac{5}{36}$

6- La probabilité de tirer en même temps et au hasard 3 boules de même couleur d'une boite contenant 9 boules dont 4 blanches et 5 boules noires est:

- $\frac{14}{36}$
- $\frac{1}{6}$
- $\frac{7}{6}$
- $\frac{3}{46}$

7- Si le nombre $1+i$ est une racine quatrième d'un complexe $U$, alors $U$ est égal à:

- $-4$
- 4
- $-4i$
- 4i

8- Si le complexe $-3+4i$ est combinaison linéaire des complexes $2+i$ et $1+i$ affectés respectivement des coefficients réels $a$ et $b$, alors le couple $(a, b)$ est égal à:

- $(-7, 11)$
- $(7, -11)$
- $(11, 7)$
- $(7, 11)$

9- Soit trois points $A(2,3)$, $B(3,5)$ et $C(4,7)$ d'un plan affine muni d'un repère. Pour ces 3 points, s'il existe un réel $k$ tel que $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, alors le réel $k$ est nécessairement égal à:

- $\frac{1}{3}$
- 2
- 3
- $\frac{1}{2}$

10- Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère une application linéaire $f$ de $E$ dans $E$ dont la matrice associée est $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $f$ est la symétrie vectorielle de $E$ de base le sous-espace $F$ de direction le sous-espace $G$, alors l'équation cartésienne de $F$ est:

- $x - y = 0$
- $x + y = 0$
- $x - 2y = 0$
- $2x - y = 0$

**PARTIE B.- Obligatoire (30 pts)**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$. On désigne par $(C)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $f$ puis calculer les limites de $f$ aux bornes de cet ensemble.

b) Etudier les variations de $f$ puis tracer la courbe $(C)$ de $f$ dans le repère orthonormal.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $(C)$ en son point d'abscisse $x_0 = \ln 2$.

**PARTIE C.- Traiter 2 des 4 exercices suivants: (40 pts)**

1- Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher. Cinq boules sont numérotées "1" les cinq autres sont numérotées "2". On tire simultanément 5 boules de l'urne et on appelle $X$ la variable aléatoire qui est égale à la somme des nombres inscrits sur les boules tirées.

a) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

b) Calculer la variance de $X$.

c) Déterminer et représenter la fonction de répartition de $X$. **(20 pts)**

2- Soit $Z$ un complexe différent de $-1$ et $\overline{Z}$ son conjugué.

On pose $Z' = \frac{2+\overline{Z}}{1+Z}$. Dans le plan complexe $(P)$ muni d'un repère orthonormal, $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ désignent les points d'affixes respectives $Z$ et $Z'$

a) Calculer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

b) Montrer que l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(x, y)$ de $(P)$ tels que $Z'$ soit imaginaire pur est un cercle privé d'un point que l'on précisera. **(20 pts)**

3- Soit $\mathcal{E}$ un plan affine de repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère dans $\mathcal{E}$ les points suivants: $A(-2,4)$, $B(-4,0)$, $C(1,0)$ et $D(3,2)$.

a) Déterminer le barycentre $G$ des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$, $(C;6)$ et $(D;-2)$.

b) Soit $E$ un point de $\mathcal{E}_2$ désignant le milieu de $[AB]$ et soit $F$ un autre point de $\mathcal{E}_2$ tel que $3\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD} = \vec{O}$. Déterminer les coordonnées des points $E$ et $F$.

c) Montrer que les points $E$, $F$ et $G$ sont alignés. **(20 pts)**

4- On considère la suite infinie $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2 \end{cases}$$

On définit sur $\mathbb{N}$ une suite $(V_n)$ par $V_n = U_n + 3$.

a) Calculer $U_1$ et $U_2$ puis montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.

c) Calculer $S = V_0 + \ldots + V_{15}$ puis $S' = U_0 + \ldots + U_{15}$.

**(20 pts)**