SESSION EXTRAORDINAIRE – SEPTEMBRE 2013

PHILO C-D

MATHÉMATIQUES

Mafic

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles 3. L'épreuve comporte trois parties. 4. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 3 heures

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (30 pts / 3 pts par question).

1- Soit la fonction f définie sur, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$. L'ensemble des primitives de f sur I est ……………

2- Si f est une similitude directe de rapport 3, sa réciproque f^{-1} a pour rapport ……………………

3- Dans un plan affine euclidien, $ABCD$ est un parallélogramme tel que : $AB = 6$, $AD = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -12$, alors AC^2 est égale à …………………………

4- Soit le complexe $(1+i)^{18}$. La partie imaginaire de ce complexe est égale à ……………..

5- Si X est une variable aléatoire telle que $E(X) = 40$, alors $E(2X+3)$ est égale à ……………..

6- La suite (U_n) de terme général $U_n = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{10^n}$ converge vers ………………………

7- La somme des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 100 est égale à …………………

8- Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes. Pour une partie, un joueur tire 3 boules simultanément. La probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur est …………

9- Si le complexe U a pour racine carrée $2i(3-i)$, alors l'écriture algébrique de U est ………………..

10- On sait qu'une fonction numérique f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*_+$. Si sa bijection réciproque f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$, alors pour tout réel x on a $f(x) =$ ………………

PARTIE B.- Obligatoire (30 points)

On note f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{x}{2} + \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes verticales, que l'on précisera.

b) Étudier les variations de f.

c) 1) Montrer que la droite Δ, d'équation $y = -\dfrac{x}{2}$, est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$.
2) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$, ses deux asymptotes verticales et la droite Δ.

e) F est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{x^2}{4} + (x-1)\ln(x-1) - x\ln x + 1.$$

Montrer que F est la primitive de f sur $]1; +\infty[$ prenant la valeur $-2\ln 2$ en 2.

PARTIE C.- Traiter deux (2) des quatre (4) exercices suivants :(40 points)

1- On considère les suites réelles (U_n) et (V_n) respectivement sur $\mathbb{N}$ par:
$U_0 = 0$ *et* $U_{n+1} = 3U_n - 8n + 6$ et $V_n = U_n - 3^n$.

a) Calculer V_0, V_1 et V_2.

b) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout n de $\mathbb{N}$, $V_n = an + b$. En déduire:
1) Que (V_n) est une suite arithmétique.
2) L'expression de U_n en fonction de n.
3) La valeur de la somme des 10 premiers termes de la suite (U_n).

2- Dans l'espace E muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(2, 1, -1)$, $B(-2, 7, 1)$, $C(5, -3, 1)$ et $D(11, -12, -2)$.

a) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b) Déterminer les coefficients a, b et c tels que D soit le barycentre des points pondérés (A, a); (B, b) et (C, c).

3- On considère le polynôme P de la variable z défini par : $P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$.

a) Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.

b) Déterminer le polynôme Q du second degré tel que pour tout complexe z, $P(z) = (z^2+1)Q(z)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. On écrira les deux racines imaginaires pures sous forme trigonométrique, puis on montrera que le produit des deux autres est réel.

4- On jette trois pièces de monnaie non truquées. Quels sont les résultats possibles?
On suppose ces résultats équiprobables. Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir pile une fois et une seule fois »?
On désigne par X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois que Face apparait. Déterminer la loi de probabilité de X.
En déduire l'espérance mathématique de X, puis calculer l'écart-type de X.
Déterminer la fonction de répartition de X, puis tracer sa courbe cumulative.